

# ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ГРАНИЧНЫМИ ЗАДАЧАМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Б. ПАНЕЯХ (TECHNION, HAIFA, ISRAEL)

В настоящей работе рассматриваются две задачи математического анализа, формально не связанные между собой. Одна из них относится к теории разрешимости функциональных уравнений не только представляющих самостоятельный интерес (и не исследованных ранее), но и нашедших неожиданное применение в нескольких областях анализа. Вторая задача связана с постановкой общих краевых задач для строго гиперболических дифференциальных уравнений высокого порядка в ограниченных областях. Обе задачи были поставлены и при определенных условиях подробно изучены в работах [P1], [P2] и [P3]. Оказалось, что эти задачи в определенном смысле эквивалентны. Было установлено, что не только доказательства соответствующих теорем, но и их формулировки существенно опираются на новые понятия и результаты в теории динамических систем, порожденных некоммутативной полугруппой отображений отрезка в себя с двумя образующими.

В настоящей работе те же задачи рассматриваются в условиях, коренным образом отличающихся от соответствующих условий в упомянутых выше работах. Однако и в новой ситуации определяющую роль как в постановке задач, так и в их изучении, играют динамические системы, аналогичные упомянутым выше. Одной из целей настоящей работы является дальнейшее развитие теории этих систем и углубление их связи с анализом. Наиболее характерный результат в этом направлении, представленный Теоремой 1, состоит в возможности разложения любой непрерывной функции из пространства  $C_{(1+r)}([0, 1])$  в ряд по орбитам рассматриваемых здесь динамических систем. Это позволяет исследовать описанные выше задачи в совершенно иных в сравнении с [P1] - [P3] предположениях. В частности, мы получаем решение функционального уравнения типа Коши в замкнутой форме и доказываем его регулярность в шкале пространств  $C^k$ . Во второй части работы рассматривается произвольный строго гиперболический оператор третьего порядка на плоскости. С этим оператором каноническим образом связывается система ограниченных областей, в каждой из которых при одном дополнительном условии на неизвестную функцию соответствующая граничная задача оказывается однозначно разрешимой в шкале пространств  $C^k$ . Ядро обратного оператора этой задачи как раз и определяется как вторая производная решения одного из функциональных уравнений, изученных в первой части настоящей работы.

## 1. Функциональные уравнения типа Коши.

Пусть  $I = \{t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ . Рассмотрим два вещественнозначных непрерывных отображения  $\delta_1$  и  $\delta_2$  отрезка  $I$  такие, что

- 1°  $\delta_1(t)\delta_2(t) > 0$  при  $t > 0$ ;
- 2°  $\delta_1(0) = \delta_2(0) = 0$ .

Мы говорим в этом случае (см. [P4]), что  $\delta_1$  и  $\delta_2$  образуют  $Z$ -конфигурацию.

Термин, вынесенный в заголовок настоящего п., описывает уравнение вида

$$(0) \quad F(\delta_1(t) + \delta_2(t)) - F(\delta_1(t)) - F(\delta_2(t)) = H(t), \quad t \in I,$$

в котором  $H$  и  $F$  представляют собой заданную и неизвестную функции, определенные на отрезках  $I$  и  $I' = [0, \max_I(\delta_1 + \delta_2)]$ , соответственно. Впервые уравнение (0) было рассмотрено в работе [P1], где функции  $\delta_1$  и  $\delta_2$  удовлетворяли совершенно иным условиям, нежели 1° и 2°. В частности, графики этих функций не имели общих точек. В

терминологии, введенной в [P4], эти функции образовывали  $\mathcal{P}$ -конфигурацию. Интерес к уравнению (0) был обусловлен прежде всего тем, что именно к нему сводились несколько новых задач из таких далеких друг от друга областей анализа, как уравнения в частных производных, интегральная геометрия, теория меры, функциональные и интегральные уравнения. Как оказалось впоследствии (см. [P5]), все сказанное в полной мере относится к уравнению (0) при условиях  $\Gamma$  и  $2^\circ$ . В настоящем п. при минимальных дополнительных ограничениях мы докажем однозначную разрешимость уравнения (0) в соответствующих парах пространств и, как отмечалось выше, построим его решение в явном виде. В следующем п. в качестве приложения мы в несколько ходов решаем новую краевую задачу для произвольного строго гиперболического оператора  $\mathcal{Z}$  порядка в ограниченной области на плоскости.

Большинство приводимых здесь результатов относится к случаям, когда отображение  $\delta = \delta_1 + \delta_2 : I \rightarrow I'$  обратимо. Это позволяет с помощью замены переменной  $\delta(t) \rightarrow t$  свести уравнение (0) к *нормальной форме* функционального уравнения типа Коши

$$(1) \quad F(t) - F(\delta_1(t)) - F(\delta_2(t)) = H(t), \quad t \in I',$$

в котором

$$(2) \quad \delta_1(t) + \delta_2(t) = t, \quad t \in I'.$$

Обозначим через  $\Phi_\delta$  полугруппу отображений отрезка  $I'$  в себя, порожденную отображениями  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Элементами этой полугруппы являются всевозможные отображения  $I'$  в себя вида  $\delta_{J_{(n)}} = id$ ,  $\delta_{J_{(n)}} = \delta_{j_n} \circ \dots \circ \delta_{j_1}$ , где  $J_{(n)} = (j_1, \dots, j_n)$  - произвольный мультииндекс с  $j_k = 1$  или  $2$  и  $n = 1, 2, \dots$ , а  $\circ$  обозначает композицию отображений. Если  $t$ - произвольная точка отрезка  $I'$ , то её *орбитой* будем называть произвольную последовательность  $(t_1, t_2, \dots)$  точек отрезка  $I'$ , удовлетворяющую условиям

$$t_1 = t, \quad t_{k+1} = \delta_{j_k}(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad j_k = 1 \text{ или } 2.$$

Очевидно, что множество таких орбит значительно шире, чем в случае динамических систем с одной образующей, поскольку переход от точки  $t_k$  к точке  $t_{k+1}$  может осуществляться двумя способами. Поэтому, как констатировалось в работе [P2], "не видно, какое применение может найти это аморфное образование в целом". В случае, когда функции  $\delta_1$  и  $\delta_2$  образуют  $\mathcal{P}$ -конфигурацию, в работах [P2] и [P3] важную роль играло подмножество  $\mathcal{T}$  - *правильных* орбит, где  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ , а  $\mathcal{T}_1$  и  $\mathcal{T}_2$  суть произвольные замкнутые подмножества в  $I'$  без общих точек. Орбита  $(t_1, t_2, \dots)$  называется  $\mathcal{T}$ -правильной, если в определении орбиты (см. выше)  $\delta_{j_k} = \delta_i$  всякий раз, когда  $t_k \in \mathcal{T}_i$ ,  $i = 1, 2$ . На языке этих орбит описывались необходимые и достаточные условия разрешимости самых разнообразных задач описанного выше типа. Здесь будет показано, что в случае  $Z$ -конфигурации и при выполнении условия (2) все орбиты полугруппы  $\Phi_\delta$  одинаково важны при решении упомянутых выше задач из анализа, приводящих к уравнению (1).

Введем в рассмотрение пространства

$$C_{\langle k+r \rangle}(I') = \{u(t) \mid u(t) = P_k(t) + t^{k+r} \phi(t)\},$$

где  $k$  - неотрицательное целое число, и  $0 \leq r < 1$ .  $P_k(t)$  в этом определении - произвольный полином степени  $\leq k$ , а  $\phi(t)$  - произвольная непрерывная функция.

С введением нормы

$$\|u\|_{\langle k+r \rangle} = \sup_{I'} |P_k(t)| + \sup_{I'} |\phi(t)|$$

пространство  $C_{\langle k+r \rangle}(I')$  становится банаховым. Грубо говоря, элементами пространства  $C_{\langle k+r \rangle}(I')$  являются непрерывные на  $I'$  функции, имеющие в точке  $t = 0$  производные до порядка  $k$  включительно, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем  $r$ .

Легко проверяется, что если все элементы  $F, H$  и  $\delta_j$ , составляющие уравнение (1), принадлежат пространству  $C_{\langle 1 \rangle}(I')$ , то условия

$$F(0) = -H(0) \quad \text{и} \quad H'(0) = 0.$$

являются необходимыми для разрешимости этого уравнения. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности, мы рассматриваем уравнение (1) при дополнительных условиях

$$(3) \quad H(0) = H'(0) = 0, \quad F(0) = 0.$$

Изложение результатов мы начнем с теоремы, описывающей неожиданную связь динамической системы, порожденной полугруппой  $\Phi_\delta$  с классическими структурами анализа, с одной стороны, а с другой - с одним из фундаментальных уравнений анализа, каковым несомненно является уравнение Коши  $F(x+y) - F(x) - F(y) = 0$ .

**Теорема 1.**  $1^\circ$  Пусть функции  $\delta_1(t)$  и  $\delta_2(t)$  образуют  $Z$ -конфигурацию на отрезке  $I$  и удовлетворяют условию (2). Если обе эти функции принадлежат пространству  $C_{(1+r)}(I)$ ,  $r > 0$  и удовлетворяют условию

$$(4) \quad \delta'_1(0)\delta'_2(0) \neq 0,$$

то для любой функции  $H \in C_{(1+r)}(I)$ , удовлетворяющей условию (3), ряд

$$(5) \quad F(t) = \sum_J H(\delta_J(t)), \quad t \in I,$$

в котором суммирование распространяется на все мультииндексы  $J = J_{(n)}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , сходится абсолютно и равномерно.

$2^\circ$  Сумма этого ряда  $F(t)$  является решением уравнения (1) и также принадлежит пространству  $C_{(1+r)}(I)$ .

Быть может, будет уместно интерпретировать ряд (5) как разложение функции  $H$  по орбитам динамической системы  $\Phi_\delta$ .

Вопросы единственности полученного решения  $F(t)$  уравнения (1), а также его регулярности в зависимости от регулярности функции  $H$  решаются положительно в следующих двух теоремах

**Теорема 2.** Все решения  $F \in C_{(1)}(I')$  однородного уравнения (0) являются линейными функциями.

Важно отметить, что эта теорема справедлива для общего функционального уравнения типа Коши (без предположения (2)). Кроме того, она справедлива в пространстве  $C_{(1)}$ , более широком, чем любое пространство  $C_{(1+r)}$ , где доказана теорема существования решения уравнения (1).

**Теорема 3.** Если  $H \in C^k(I)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , то решение  $F$  уравнения (1) принадлежит пространству  $C^k(I)$ , и ряд (5) сходится в  $C^k(I)$ .

Эта теорема играет важную роль в приложениях результатов, относящихся к функциональным уравнениям, в теории граничных задач для дифференциальных уравнений (см. Теорему 5 ниже).

В следующей теореме утверждается, что результат Теоремы 2 является точным: существуют однородные функциональные уравнения типа Коши, имеющие нелинейные решения в пространствах чуть более широких, чем  $C_{(1)}(I)$ .

**Теорема 4.**  $1$  Допустим, что неотрицательные числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют условию  $a + b = 1$ . Тогда уравнение

$$(6) \quad F(t) - F(at) - F(bt) = 0, \quad t \in I,$$

имеет бесконечное множество нелинейных решений при условии, что  $\log_b a$  рационально. Все эти решения принадлежат пространству  $C_{(1, \ln t)}(I) = \{u \mid u = a_0 + t \ln t \varphi(t)\}$ , где  $a_0$  - константа, а  $\varphi(t) \in C(I)$ .

<sup>1</sup>Этот результат был впервые получен другим способом в диссертации Орра Шалита (Технион).

Из соображений краткости остановимся на доказательстве двух первых теорем.

*Доказательство Теоремы 1.* 1° Функция  $H(t)$ , как следует из условия (3) и определения пространства  $C_{\langle 1+r \rangle}(I)$ , может быть представлена в виде  $H(t) = t^{1+r}\varphi(t)$ , где  $\varphi$  - непрерывная на  $I$  функция. По этой причине

$$F(t) = \sum_J \delta_J^{1+r}(t)\varphi(\delta_J(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{J_{(n)}} \delta_{J_{(n)}}^{1+r}(t)\varphi(\delta_{J_{(n)}}(t)).$$

Введем обозначение  $A_n(t) = \sum_{J_{(n)}} \delta_{J_{(n)}}^{1+r}(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Принимая во внимание соотношение  $\delta_{J_{(0)}}(t) = t$  мы можем переписать  $A_n(t)$  в виде

$$A_n(t) = t^{1+r} \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^2 \left( \frac{\delta_{j_n} \circ \dots \circ \delta_{j_1}(t)}{\delta_{j_{n-1}} \circ \dots \circ \delta_{j_1}(t)} \right)^{1+r} \circ \dots \circ \left( \frac{\delta_{j_1}(t)}{t} \right)^{1+r}.$$

Отметим теперь, что на основании соотношений  $\Gamma$ , (2) и (4) существует такая константа  $q < 1$ , для которой неравенство

$$(\delta_1(t)/t)^{1+r} + (\delta_2(t)/t)^{1+r} \leq q$$

выполняется при всех  $t \in I$ . Поэтому при любом значении  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,

$$\sum_{j_k=1}^2 (\delta_{j_k} \circ \dots \circ \delta_{j_1}(t) / \delta_{j_{k-1}} \circ \dots \circ \delta_{j_1}(t))^{1+r} \leq q,$$

где обозначено  $\delta_{j_0} = id$ . Отсюда немедленно следует неравенство  $A_n(t) \leq t^{1+r}q^n$ , что влечёт за собой равномерную сходимость ряда  $\sum_J (\delta_J(t)/t)^{1+r}$ , а значит и возможность представления его суммы  $F(t)$  в виде

$$F(t) = t^{1+r}f(t), \quad t \in I,$$

где  $f(t)$  - непрерывная функция. Это завершает доказательство п.1 теоремы.

2° Тот факт, что функция  $F(t)$  удовлетворяет функциональному уравнению типа Коши, проверяется непосредственно с помощью представления (5). Это завершает доказательство Теоремы 1.

*Доказательство Теоремы 2.* Разделим обе части однородного уравнения (1) на  $(\delta_1 + \delta_2)(t)$ . Полагая

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= F(z)/z, & \rho_j(z) &= \delta_j(z)/(\delta_1 + \delta_2)(z), & \text{при } z \in I' \setminus \{0\}, \\ \text{и } \Phi(0) &= 0, & \rho_j(0) &= \delta_j' / (\delta_1 + \delta_2)'(0), & j = 1, 2, \end{aligned}$$

мы приходим к эквивалентному функциональному уравнению

$$(7) \quad \Phi(\delta_1 + \delta_2) - \rho_1(t)\Phi(\delta_1(t)) - \rho_2(t)\Phi(\delta_2(t)) = 0, \quad t \in I',$$

в котором все функции  $\delta_j$ ,  $\rho_j$ ,  $\Phi$  непрерывны на отрезке  $I'$ . Покажем, что любое непрерывное решение  $\Phi$  уравнения (7) является константой. Действительно, введем обозначение  $\mathcal{M} = \max_{I'} \Phi$  и пусть  $t_0 = \min\{t \mid \Phi(t) = \mathcal{M}\}$ . Допустим, что  $t_0 > 0$ . Тогда, в силу непрерывности,  $\Phi(t_0) = \mathcal{M}$ , а значит для любой точки  $t_1$  из непустого множества  $\{t \mid (\delta_1 + \delta_2)(t_1) = t_0\}$  выполняется соотношение

$$\Phi(\delta_1(t_1)) = \Phi(\delta_2(t_2)) = \mathcal{M},$$

так как  $(\rho_1 + \rho_2)(t) = 1$  при всех значениях  $t$ . Это, однако, противоречит определению точки  $t_0$ , поскольку  $\delta_1(t_1) < t_0$  (согласно 1°). Тем самым доказано, что  $t_0 = 0$ , и поэтому  $\Phi(0) = \mathcal{M}$ . Повторяя дословно это рассуждение применительно к точке минимума функции  $\Phi$ , мы приходим к соотношению  $\Phi(0) = \min_{I'} \Phi$ , что и доказывает теорему.

**Замечания** 1. Вопрос о разрешимости уравнения (1) для произвольной функции  $H \in C_{\langle 1 \rangle}(I')$  остается открытым.

2. Разумеется все полученные результаты переносятся с понятными изменениями на неоднородные мультипликативные функциональные уравнения типа Коши

$$F(\delta_1(t)\delta_2(t)) = F(\delta_1(t))F(\delta_2(t))H(t), \quad t \in I.$$

## 2. Граничные задачи для гиперболических дифференциальных операторов

Результаты, приведенные в предыдущем п., являются новыми в теории функциональных уравнений. Более того, уравнения вида (0) никогда не рассматривались в рамках этой теории, несмотря на её долгую историю (см. например, [КСГ]). В настоящем п. мы покажем, что эти уравнения помимо всего прочего представляют собой необходимый технический инструмент при изучении граничных задач в ограниченных областях для гиперболических дифференциальных операторов на плоскости. Относительно других применений уравнения (0) в анализе см. например [РЗ].

В пространстве  $\mathbb{R}^2$  переменных  $x, y$  мы рассматриваем строго гиперболический оператор  $P(\partial) = P(\partial_x, \partial_y)$  третьего порядка (см. [Н]). Любой такой оператор (см. [Р5]) допускает представление в виде

$$P(\partial) = (\partial/\partial\bar{l}_1)(\partial/\partial\bar{l}_2)(\partial/\partial\bar{l}_3) + Q(\partial),$$

где  $\bar{l}_1, \bar{l}_2$  и  $\bar{l}_3$  - попарно трансверсальные векторные поля, а  $Q$  - оператор второго порядка. Фиксируем произвольную точку  $O$  и рассмотрим 6 полутраекторий полей  $l_1, l_2$  и  $l_3$ , начинающихся в  $O$  и представляющих собой характеристики оператора  $P(\partial)$ . Возьмем произвольную тройку соседних лучей  $l_1, l_2$  и  $l_3$ , лежащих на траекториях полей  $\bar{l}_1, \bar{l}_2$  и  $\bar{l}_3$ , соответственно, и таких, что луч  $l_2$  расположен между лучами  $l_1$  и  $l_3$ , другими словами,  $\bar{l}_2 = \lambda_1\bar{l}_1 + \lambda_3\bar{l}_3$ , где  $\lambda_1 > 0$  и  $\lambda_3 > 0$ . На лучах  $l_1$  и  $l_2$  выберем произвольные точки  $A_1$  и  $A_2$ , соответственно, и определим область  $D_1$  как характеристический параллелограмм  $OA_1O'A_2$ , в котором стороны  $A_1O'$  и  $A_2O'$  являются траекториями векторных полей  $\bar{l}_2$  и  $\bar{l}_1$ , соответственно.

Введем в  $D_1$  квазидиагональ  $\Gamma = OO'$ , представляющую собой неособую  $C^2$ - кривую, удовлетворяющую следующим условиям:

- (i) кривая  $\Gamma$  трансверсальна векторному полю  $\bar{l}_3$  всюду, а векторным полям  $\bar{l}_1$  и  $\bar{l}_2$  в точке  $O$ ;
- (ii) кривая  $\Gamma$  не имеет общих точек с траекториями  $OA_1$  и  $OA_2$ , за исключением точки  $O$ .

Первая краевая задача для описанного оператора  $P(\partial)$  определяется следующим образом.

Для произвольных функций  $f$  в области  $D_1$  и  $g$  на множестве  $\mathcal{M} = OA_1 \cup OA_2 \cup \Gamma$  требуется определить функцию  $u$  в  $\bar{D}_1$  так, чтобы выполнялись соотношения

$$(15) \quad P(\partial)u = f \quad \text{в } D_1, \quad u = g \quad \text{на } \mathcal{M}.$$

Прежде, чем формулировать результаты, относящиеся к этой задаче, остановимся на условиях совместности данных задачи. Обозначим через  $g_1, g_2$  и  $g_3$  ограничения функции  $g$  на кривые  $OA_1, OA_2$  и  $\Gamma$ , соответственно. Если соотношения

$$x = x_j(t), \quad y = y_j(t), \quad t \in I, \quad j = 1, 2, 3,$$

определяют параметрические представления этих кривых, соответственно, причём  $O = (x_j(0), y_j(0))$  для каждого  $j$ , то

$$u(x_j(t), y_j(t)) = g_j(t), \quad t \in I.$$

Обозначим через  $\bar{\tau}$  единичный касательный вектор кривой  $\Gamma$  в точке  $O$ . Согласно выбору векторов  $\bar{l}_1$  и  $\bar{l}_2$  и в силу их трансверсальности, существуют такие положительные константы  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , что

$$\bar{\tau} = \mu_1\bar{l}_1 + \mu_2\bar{l}_2.$$

Это приводит к первому необходимому условию согласования:

$$(16) \quad g'_3(0) = \mu_1 g'_1(0) + \mu_2 g'_2(0).$$

Второе необходимое условие отражает наличие общей точки  $O$  у всех трёх кривых  $OA_1, OA_2$  и  $\Gamma$ :

$$(17) \quad g_1(0) = g_2(0) = g_3(0) = u(0, 0).$$

**Теорема 5.** Пусть  $P(\partial)$  - произвольный строго гиперболический оператор третьего порядка с постоянными коэффициентами в области  $D_1$ . Тогда для любых функций  $f \in C(\overline{D_1})$  и  $g \in C^2(\mathcal{M})$ , удовлетворяющих условиям (16) и (17), существует единственное решение  $u \in C^2(\overline{D_1})$  задачи (15). Обратный оператор  $(f, g) \mapsto u$  ограничен и, если  $(f, g) \in C^k(\overline{D_1}) \times C^{k+2}(\mathcal{M})$ , то  $u \in C^{k+2}(\overline{D_1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Соотношение  $g \in C^k(\mathcal{M})$  означает, что все функции  $g_1, g_2$  и  $g_3$   $k$  раз непрерывно дифференцируемы на кривых  $OA_1, OA_2$  и  $OO'$ , соответственно.

*Доказательство.* Для краткости ограничимся случаем однородного оператора  $P = (\partial/\partial\bar{l}_1)(\partial/\partial\bar{l}_2)(\partial/\partial\bar{l}_3)$ . В этой ситуации с помощью подходящей замены переменных задача (15) сводится к задаче

$$(18) \quad (\partial_x - \partial_y)\partial_x\partial_y u = f \quad \text{в } D_1, \quad u = g \quad \text{на } \mathcal{M}.$$

Здесь  $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ , а множество  $\mathcal{M}$  состоит из кривых

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, y = 0\}, \quad \mathcal{M}_2 = \{(x, y) \mid x = 0, 0 \leq y \leq b\} \quad \text{и} \\ \Gamma = \{(x, y) \mid x = \delta_1(t), y = \delta_2(t), t \in I\}. \end{aligned}$$

Соотношения  $x = \delta_1(t)$ ,  $y = \delta_2(t)$  определяют параметрическое представление кривой  $\Gamma$  и удовлетворяют следующим условиям, диктуемым свойствами (i) и (ii) этой кривой:

$$(j) \quad \delta_1(0) = \delta_2(0) = 0, \quad \delta_1(1) = a, \quad \delta_2(1) = b;$$

$$(jj) \quad \delta_1(t)\delta_2(t) > 0 \quad 0 < t \leq 1;$$

$$(jjj) \quad \delta'_1(0)\delta'_2(0) > 0, \quad \delta'_1(t) + \delta'_2(t) > 0, \quad t \in I.$$

Последнее из этих условий позволяет выбрать новую параметризацию на  $\Gamma$ , при которой (новые) функции  $\delta_1(t)$  и  $\delta_2(t)$  удовлетворяют условию

$$(jv) \quad \delta_1(t) + \delta_2(t) = t, \quad t \in I' = [0, a + b],$$

а значит и условию  $\delta'_1(t) + \delta'_2(t) = 1$ . Пусть

$$g = G_1(x) \quad \text{на } \mathcal{M}_1, \quad g = G_2(y) \quad \text{на } \mathcal{M}_2, \quad \text{и} \quad g = G_3(x, y) \quad \text{на } \Gamma.$$

Введем в рассмотрение функцию  $\varphi(t) = G_3(\delta_1(t), \delta_2(t))$ . Очевидно, что при переходе к задаче (18) условия (16) и (17) трансформируются в условия

$$(19) \quad G_1(0) = G_2(0) = \varphi(0) \quad \text{и} \quad \varphi'(0) = \delta'_1(0)G'_1(0) + \delta'_2(0)G'_2(0).$$

Пусть вначале  $f = 0$ . Введем функцию

$$u(x, y) = \int_0^x \int_0^y F(s + t) dt ds + G_1(x) + G_2(y) - G_1(0)$$

в области  $D_1$ . Здесь  $F$ - произвольная непрерывная функция на отрезке  $I'$ . На основании соотношений (19) эта функция удовлетворяет граничному условию  $u = g$  на кривых  $OA_1$  и  $OA_2$ . С другой стороны,  $u(x, y)$  является решением дифференциального уравнения в (18) при  $f = 0$  (если оператор  $\partial_x - \partial_y$  трактовать как векторное поле  $\partial/\partial\bar{l}$  с  $\bar{l} = (1, -1)$ ). Таким образом, для решения задачи (18) с  $f = 0$  остается выбрать функцию  $F$  так, чтобы удовлетворялось условие  $u(x, y) = G_3(x, y)$  на  $\Gamma$ . Мы приходим, таким образом, к следующему интегральному уравнению:

$$(20) \quad \int_0^{\delta_1(t)} \left( \int_0^{\delta_2(t)} F(x + y) dy \right) dx = H(t), \quad t \in I',$$

для неизвестной функции  $F \in C(I')$ . Что касается заданной функции  $H(t)$ , то она имеет вид

$$H(t) = -G_1(\delta_1(t)) - G_2(\delta_2(t)) + G_3(\delta_1(t), \delta_2(t)) + G_1(0),$$

и, как следует из (19), удовлетворяет условиям (3). Покажем, что уравнение (20) имеет единственное решение при любой функции  $H(t) \in C^2(I')$  со свойством (3). С этой целью введем новую неизвестную функцию  $\Phi$ , удовлетворяющую условиям

$$\Phi''(z) = F(z), \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) = 0, \quad z \in I',$$

(однозначно связанную с функцией  $F$ ). Подставляя  $\Phi''(z)$  вместо  $F$  в уравнение (20) и дважды интегрируя по частям, мы приходим к следующему функциональному уравнению для функции  $\Phi$ :

$$\Phi(t) - \Phi(\delta_1(t)) - \Phi(\delta_2(t)) = H(t), \quad t \in I'.$$

В силу условия (jv) это не что иное, как функциональное уравнение типа Коши, изученное в п.1. Условия (j)-(jv) позволяют воспользоваться теоремами 1 и 3, и мы заключаем, что последнее уравнение однозначно разрешимо в пространстве  $C^2(I')$  при любой функции  $H \in C^2(I')$ . Это означает, что тем же свойством обладает задача (18) при  $f = 0$ . Для завершения доказательства Теоремы 5 остается предъявить какое-либо решение  $u(x, y)$  дифференциального уравнения в (18) и показать, что это решение принадлежит пространству  $C^k(\overline{D}_1)$ , если  $f \in C^k(\overline{D}_1)$ . Непосредственно проверяется, что нужным свойством обладает функция

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^x \left( \int_0^y \left( \int_{(\delta_2 - \delta_2)(x+y)}^{x-y} f\left(\frac{s+t+z}{2}, \frac{s+t-z}{2}\right) dz \right) dt \right) ds.$$

Это завершает доказательство Теоремы 5. □

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [KCG] M.Kuczma, B.Choczewski and R.Ger, *Iterative functional equations*, Encyclopedia of Mathematics and its applications 32, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [H] L.Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, v.2, Springer-Verlag, 1983.
- [P1] B.Paneah, On Solvability of Functional Equations Relating to Dynamical System with Two Generators, *Functional Analysis and Its Applications*, v.37, No.1, pp.46-60, 2003.
- [P2] B.Paneah, Noncommutative Dynamical Systems with Two Generators and Their Applications in Analysis, *Discret and Continuous Dynamical Systems*, v.9, No.6, pp.1411-1420, 2003.
- [P3] B.Paneah, Dynamical Approach to Some Problems in Integral Geometry, *Trans.Amer.Math.Soc.*, v.356, No.7, pp.2757-2780, 2003.
- [P4] B.Paneah, Dynamic Methods in the General Theory of Cauchy Type Functional Equations, *Contemporary Mathematics*, v.364, pp.205 - 223, 2004.
- [P5] B.Paneah, Boundary Problems for Higher Order Hyperbolic Differential Equations in Bounded Domains, *Russian Journal of Mathematical Physics*, v.11, No.4, pp.311 - 330, 2004.